E.N.S. FONTENAY - SAINT CLOUD

Option Sciences Physiques

Mathématiques II

Durée : 4 heures

I

On désigne par $C^0(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et par $C^2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont la dérivée seconde est continue.

On admet le résultat suivant : quelles que soient les fonctions q et f de $C^0(\mathbb{R})$ et les nombres réels a et b, il existe une unique fonction u de $C^2(\mathbb{R})$ solution du problème (P) :

$$(P)\qquad \begin{cases} -u''(x) + q(x)\,u(x) = f(x) \\ u(0) = a \\ u'(0) = b. \end{cases}$$

1° Montrer que si q et f appartiennent à $C^0(\mathbb{R})$, l'ensemble des solutions de l'équation (E) :

$$(E)\qquad -u''(x) + q(x)\,u(x) = f(x)$$

constitue un sous-espace affine de dimension 2 de $C^2(\mathbb{R})$.

2° Soient v et w les solutions respectives des problèmes suivants :

$$\begin{cases} -v''(x) + q(x)\,v(x) = 0 \\ v(0) = 1 \\ v'(0) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -w''(x) + q(x)\,w(x) = 0 \\ w(0) = 0 \\ w'(0) = 1. \end{cases}$$

Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$v(x)\,w'(x) - v'(x)\,w(x) = 1.$$

3° On suppose $q(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Prouver que v et w sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$. (On pourra considérer la dérivée seconde de la fonction $(v(x))^2$.)

4° On suppose encore $q(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et de plus q et f périodiques de période $T > 0$. Montrer qu'il existe une unique fonction $u \in C^2(\mathbb{R})$ périodique de période T qui soit solution de l'équation (E).

II

On désigne par E_0 (resp. E_2) l'ensemble des éléments de $C^0(\mathbb{R})$ (resp. $C^2(\mathbb{R})$) qui sont de plus périodiques de période T. Désormais q et f désignent deux éléments de E_0, q admettant de plus la propriété suivante : $q(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $F^{(n)}$ l'ensemble des éléments de E_0 qui sont affines sur chaque intervalle $\left[\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n}\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

1° *a*. Montrer que $F^{(n)}$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie n de E_0.

b. Montrer que les formes linéaires :

$$\varphi_k : F^{(n)} \to \mathbb{R}$$

$$\varphi_k(U) = U\left(\frac{kT}{n}\right), \qquad k = 1, \ldots, n$$

constituent une base du dual de $F^{(n)}$. Déterminer la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $F^{(n)}$ dont $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est la base duale.

2° Soit F l'espace vectoriel des fonctions U continues de période T de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, autrement dit telles qu'il existe $x_0, x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ tels que $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = T$ et que U soit continûment dérivable sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$: U admet donc une dérivée à gauche $U'_g(x_k)$ et une dérivée à droite $U'_d(x_k)$ en chaque point x_k.

1984

- P 29 -

Soit D l'application qui à $U \in F$ associe la fonction D (U) définie par :

$$D(U)(x) = U'(x) \text{ si U est dérivable en } x$$
$$= \frac{1}{2}(U'_g(x) + U'_d(x)) \text{ sinon.}$$

On définit une forme bilinéaire $A : F \times F \to \mathbb{R}$ par :

$$A(U, V) = \int_0^T [D(U)(x) D(V)(x) + q(x) U(x) V(x)] dx,$$

et une forme linéaire $L : F \to \mathbb{R}$ par :

$$L(V) = \int_0^T f(x) v(x) dx.$$

Soit U_n un élément de $F^{(n)}$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\quad \forall V \in F^{(n)} : A(U_n, V) = L(V)$

(ii) $\quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} : \sum_{k=1}^{n} A(e_k, e_j) \varphi_k(U_n) = L(e_j)$

Si U_n satisfait aux deux propriétés précédentes, on dira que U_n est solution du problème (P_n).

3° *a*. Soit $B = (b_{jk})$ une matrice carrée d'ordre n à éléments réels possédant la propriété suivante : pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ on a

$$b_{jj} > \sum_{k \neq j} |b_{jk}|.$$

Montrer que le système linéaire de n équations à n inconnues

$$\sum_{k=1}^{n} b_{jk} X_k = 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

admet la seule solution $(X_1, \ldots, X_n) = (0, \ldots, 0)$ (raisonner par l'absurde en considérant l'équation d'indice j, où j est tel que

$$|X_j| = \max \{ |X_k| \mid k = 1, \ldots, n \}).$$

En déduire que B est inversible.

b. Prouver que :

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} : A(e_j, e_j) = \frac{2n}{T} + \int_{\frac{(j-1)T}{n}}^{\frac{jT}{n}} q(x) \left(\frac{nx}{T} - j + 1\right)^2 dx + \int_{\frac{jT}{n}}^{\frac{(j+1)T}{n}} q(x) \left(j + 1 - \frac{nx}{T}\right)^2 dx ;$$

$$\forall j \in \{1, \ldots, n-1\} :$$

$$A(e_j, e_{j+1}) = -\frac{n}{T} + \int_{\frac{jT}{n}}^{\frac{(j+1)T}{n}} q(x) \left(j + 1 - \frac{nx}{T}\right) \left(\frac{nx}{T} - j\right) dx ;$$

$$A(e_1, e_n) = -\frac{n}{T} + \int_0^{\frac{T}{n}} q(x) \left(\frac{nx}{T}\right) \left(1 - \frac{nx}{T}\right) dx ;$$

$$A(e_j, e_k) = 0 \quad \text{si} \quad 2 \leqslant |k - j| \leqslant n - 2.$$

c. Soit pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$m_j = \inf \left\{ q(x) \mid x \in \left[\frac{(j-1)T}{n}, \frac{jT}{n}\right] \right\},$$
$$M_j = \sup \left\{ q(x) \mid x \in \left[\frac{(j-1)T}{n}, \frac{jT}{n}\right] \right\}.$$

Prouver qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $M_j < 2 m_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.

d. Prouver que si $N \in \mathbb{N}$ possède la propriété ci-dessus, pour tout $n \geqslant N$ il existe un unique élément U_n de $F^{(n)}$ qui soit solution du problème (P_n).

III

On dit qu'une suite de fonctions (g_n) définies sur un intervalle I converge uniformément sur I vers une fonction g si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait :

$$\forall x \in I : |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

.../...

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit p_n l'application de E_0 dans $F^{(n)}$ qui à $u \in E_0$ associe l'élément $p_n(u)$ de $F^{(n)}$ tel que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\varphi_k(p_n(u)) = u\left(\frac{kT}{n}\right).$$

1° Prouver que la suite de fonctions $(p_n(u))$ converge uniformément vers u sur $[0, T]$.

2° Prouver que si u appartient à E_2, alors la suite de fonctions $(D(p_n(u)))$ converge uniformément vers u' sur $[0, T]$.

3° Prouver que si u appartient à E_2, alors $A(p_n(u) - u, p_n(u) - u)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

4° Soit $u \in E_2$ l'unique solution de (E) dans E_2, et pour tout $n \geqslant N$, soit U_n l'unique solution du problème (P_n) dans $F^{(n)}$.

a. Calculer $A(u, v)$ pour $v \in F$ et en déduire que l'on a pour tout $V \in F^{(n)}$:

$$A(U_n - u, U_n - u) = A(U_n - u, V - u).$$

b. Montrer que pour tout $(U, V) \in F \times F$, on a

$$[A(U, V)]^2 \leqslant A(U, U)\, A(V, V).$$

c. En déduire que $A(U_n - u, U_n - u)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.